

Studi didactic transposition: Eksplorasi knowledge to be taught pada limit fungsi

Rini Sulastris*

Department of Mathematics Education, Universitas Serambi Mekkah, Banda Aceh, Aceh, Indonesia, 23245

*Corresponding Author: rini.sulastris@serambimekkah.ac.id

Abstract. The purpose of this research is to describe the analysis of knowledge to be taught on limit of function. This research is part of the didactic transposition research on the concept of limit of function which consists of four stages. Qualitative research with descriptive method is used in this study. The target is a differential calculus course taught in the first semester at a university in Aceh. Data collection techniques consist of documentation studies and unstructured interviews. Analysis of calculus text book documents, especially on limit functions, was carried out using a praxeology approach. The results of the analysis show that the description of the differential calculus course contains material on the real number system, functions and graphs, limits of functions, continuity of functions, derivatives of functions, and applications of derivatives. This is different from the presentation of material in RPS which is compiled by a team of lecturers supporting differential calculus courses. For presentation of material in calculus textbooks, the concept of the limit of a function begins with an intuitive or informal introduction to the concept. Several cases are given to deepen the concept of limits through graphs, analytics, and numbers.

Historis Artikel:

Diterima: 16 Juli 2023

Direvisi: 5 Agustus 2023

Disetujui: 15 Agustus 2023

Keywords:

Didactic transposition; limit of function; calculus; knowledge to be taught; curriculum

Sitasi: Sulastris, R. (2023). Studi didactic transposition: Eksplorasi knowledge to be taught pada limit fungsi. *Journal of Didactic Mathematics*, 4(2), 106-117. Doi: 10.34007/jdm.v4i2.1903

PENDAHULUAN

Kalkulus merupakan salah satu mata kuliah yang terdapat dalam kurikulum program sarjana pada sebagian besar jurusan sains dan teknik, termasuk Pendidikan matematika. Kalkulus dipandang sebagai kursus pengantar dalam mempersiapkan matematika lanjutan (Zollman, 2014; Oktaviyanthi et al., 2018). Oleh karena itu, konsep yang akurat tentang gagasan utama matematika dalam mata kuliah ini seperti limit, turunan, dan integral sangat penting dimiliki oleh mahasiswa (Mokhtar et al., 2013).

Tahap awal dalam mempelajari kalkulus, siswa maupun mahasiswa akan dihadapkan dengan konsep limit fungsi. Akan tetapi, konsep limit yang merupakan salah satu ide yang paling mendasar ini tidak hanya dalam memahami kalkulus tetapi juga dalam mengembangkan pemikiran matematis di luar kalkulus dan mengejar ketelitian matematis (Ferrini-Mundy & Lauten, 1993; Tall, 1992). Meskipun konsep limit telah lama dianggap mendasar untuk pemahaman kalkulus dan analisis riil (Ervynck, 1981), tetapi penelitian lainnya menegaskan bahwa pemahaman yang lengkap tentang konsep limit di kalangan siswa relatif jarang (Davis & Vinner, 1986; Tall, 1980; Tall & Vinner, 1981; Sierpinska, 1987; Robert, 1982; Cornu, 1983).

Selain hubungan antara materi, guru, dan siswa, juga terdapat faktor lain yang dapat mempengaruhi pengetahuan dan miskonsepsi pada konsep limit fungsi. Faktor tersebut antara lain kurikulum yang berlaku dalam penyusunan materi limit, dan penggunaan buku teks yang menjadi sumber bacaan dalam pembelajaran di kelas. Hal ini merupakan suatu permasalahan yang sangat kompleks apabila ingin melihat faktor yang dapat mempengaruhi pengetahuan subjek dalam suatu materi. Dengan demikian, untuk mengkaji dan menganalisis permasalahan secara komprehensif tersebut dilakukan dengan melakukan kajian transposisi didaktik.

Chevallard (1989) pertama kali yang memperkenalkan teori transposisi didaktik dalam pendidikan matematika dengan mengklasifikasikan matematika sebagai *scholarly body of knowledge* dan sebagai *subject to be taught and learned*. Selanjutnya, transposisi didaktik didefinisikan sebagai pengetahuan transposisional antara pengetahuan matematika yang dikembangkan oleh matematikawan yang disebut *scholarly knowledge*, matematika yang harus diajarkan berdasarkan kurikulum yang disebut *knowledge to be taught*, pengetahuan matematika yang diajarkan oleh guru dalam proses pembelajaran di kelas yang disebut *taught knowledge*, dan pengetahuan matematika yang dipelajari oleh siswa yang disebut *learned knowledge*.

Tahap *scholarly knowledge* merupakan tahapan pengetahuan matematika yang bersifat *a priori* dan formal sehingga diperlukan suatu proses transposisi dengan repersonalisasi dan rekontektualisasi untuk menjadikan pengetahuan tersebut bersifat *a posteriori*. Dengan demikian, pengetahuan ini dapat dirancang untuk menjadi materi dalam kurikulum (*knowledge to be taught*) dan atau materi sebagai bahan pembelajaran di kelas (*taught knowledge*). Suatu kurikulum mengungkapkan pedoman dan harapan yang sesuai dengan fungsi sekolah. Sebaliknya, nilai-nilai, maksud dan tujuan yang dinyatakan dalam kurikulum dan proses pengajaran diselenggarakan untuk mewujudkan kurikulum. Dalam hal ini, guru seharusnya bertindak selaras dengan kurikulum, dan siswa diharapkan belajar untuk mencapai maksud dan tujuan yang ditetapkan dalam kurikulum. Jika dipahami bahwa kurikulum berisi semua pengalaman belajar di sekolah, maka semua kegiatan di sekolah termasuk dalam kurikulum. Selain itu, penggunaan buku teks sebagai buku pengantar juga merupakan bagian dari pengetahuan yang akan diajarkan. Selanjutnya, buku ini digunakan guru dan siswa dalam proses pembelajaran di kelas. Dengan kata lain, siswa sebagai objek yang menerima atau mempelajari materi yang diajarkan oleh guru, yang merupakan bagian dari tahap *learned knowledge* dari proses transposisi didaktik.

Beberapa penelitian terkait transposisi didaktik eksternal antara lain kajian pada matematika sarjana yang mengidentifikasi kesamaan dan perbedaan antara program dan silabus, dengan perbedaan yang relatif signifikan antara universitas Kanada dan Eropa dalam hal keseluruhan program (Bosch et al., 2021). Transposisi didaktik segi empat yang menunjukkan bahwa ada perbedaan yang signifikan antara pengetahuan yang akan diajarkan dan konten yang ditawarkan oleh guru sehingga terjadi konflik keliling-luas dalam pikiran siswa (Akar & İşıksal-Bostan, 2022). Transposisi didaktik pada bilangan asli oleh Henriksen (2022) menunjukkan perbedaan yang signifikan pada tingkat tema dalam kurikulum nasional di negara Denmark, Swedia, dan Australia. Dengan demikian, kajian yang dilakukan ini merupakan hal baru dan berbeda dengan penelitian sebelumnya. Adapun tujuan penelitian ini adalah untuk mendeskripsikan hasil analisis *knowledge to be taught* pada materi limit fungsi.

METODE

Penelitian ini merupakan bagian dari penelitian transposisi didaktik pada konsep limit fungsi yang terdiri atas empat tahapan yaitu *scholarly knowledge*, *knowledge to be taught*, *taught knowledge*, dan *learned knowledge*. Khusus pada penulisan ini dipaparkan temuan hanya untuk tahapan *knowledge to be taught* dengan menggunakan penelitian kualitatif dengan metode deskriptif. Hal ini bertujuan untuk mendeskripsikan temuan analisis pada dokumen yang dilakukan. Adapun sasaran penelitian ini adalah mata kuliah kalkulus diferensial yang diajarkan pada semester pertama di salah satu perguruan tinggi di Aceh. Dalam hal ini juga melibatkan dosen pengampu mata kuliah kalkulus diferensial dikarenakan adanya keterlibatan dosen dalam penyusunan kurikulum program studi dan juga rencana pembelajaran semester khususnya pada mata kuliah kalkulus diferensial.

Teknik pengumpulan data yang digunakan dalam bentuk studi dokumentasi dan wawancara tidak terstruktur. Hal ini dilakukan untuk mendapatkan data yang konsisten, jelas, dan memiliki kekuatan jika dibandingkan dengan hanya satu pendekatan. Mengkaji dokumen dalam penelitian kualitatif sangat diperlukan karena dapat merepresentasikan sumber yang tepat terkait data teks atau kata. Menurut Creswell (2012), catatan publik dan juga pribadi yang berkaitan dengan tempat atau partisipan dalam suatu penelitian merupakan bagian dari dokumen. Beberapa dokumen yang

digunakan sebagai sumber data dari penelitian ini yaitu (1) dokumen kurikulum program studi pendidikan matematika meliputi dokumen deskripsi mata kuliah dan distribusi mata kuliah. Kedua dokumen ini dirancang oleh tim penyusun kurikulum program studi, dan diperoleh secara online pada laman program studi, dan (2) buku teks kalkulus yang menjadi salah satu buku referensi dalam mata kuliah kalkulus diferensial yaitu karangan Purcell & Varberg (1987). Kajian yang dilakukan dalam studi dokumentasi ini terkait dengan konsep limit fungsi yang disajikan pada buku teks, kesesuaian konsep tersebut dengan scholarly knowledge, dan urutan materinya pada buku teks.

Analisis dokumen buku teks kalkulus khususnya pada materi limit fungsi dilakukan dengan menggunakan pendekatan *praxeology*. Pendekatan ini dipandang bisa menjadi salah satu cara dalam menilai atau mengkaji pengetahuan dan tindakan manusia yaitu penulis buku berupa tulisan atau gambar yang termuat dalam sebuah buku. Hal ini dikarenakan buku juga merupakan hasil pemikiran dari penulis buku. Dengan demikian, tujuannya adalah untuk memudahkan dalam mengidentifikasi hasil pemikiran penulis buku dan sajian materi maupun masalah atau tugas yang berkaitan dengan konsep materi yang disajikan dalam buku. Selain itu, untuk memastikan apakah desain materi dalam buku tersebut berdampak pada *learning obstacle* bagi mahasiswa. Dalam mengkaji buku teks sebagai mathematical praxeology dilakukan berdasarkan komponen praksiologi yang terdiri atas blok praksis (\mathbf{T} = *type of tasks*, dan $\mathbf{\tau}$ = *techniques*), dan blok logos ($\mathbf{\theta}$ = *technology*, dan $\mathbf{\Theta}$ = *theory*). Kajian *praxeology* pada setiap sajian materi, tugas berupa konsep, contoh soal, atau soal-soal latihan dilakukan mengikuti tahapan penyajian materi dalam buku kalkulus.

HASIL DAN PEMBAHASAN

Tinjauan pengetahuan konsep limit fungsi yang akan diajarkan akan disajikan dalam dua dokumen yaitu kurikulum program studi pendidikan matematika dan buku teks kalkulus. Hal ini bertujuan untuk menemukan posisi atau kedudukan materi limit fungsi pada kedua dokumen tersebut. Khusus pada buku teks, analisis yang dilakukan dengan menggunakan pendekatan the theory of praxeologies.

Materi Limit Fungsi dalam Kurikulum Program Studi

Bagian kurikulum ini, dikaji dua dokumen yang berkaitan dengan kurikulum yang disusun dan dikeluarkan oleh tim penyusun kurikulum program studi yang meliputi deskripsi mata kuliah dan distribusi mata kuliah program studi pendidikan matematika pada salah satu perguruan tinggi di Aceh, Indonesia. Kedua dokumen ini diperoleh secara online dari website atau laman program studi pendidikan matematika tersebut.

Dokumen pertama, deskripsi mata kuliah. Dalam dokumen ini terdapat 77 mata kuliah yang harus diikuti oleh mahasiswa selama belajar di program studi pendidikan matematika. Dalam dokumen tersebut tidak ada penjelasan atau keterangan apakah mata kuliah tersebut merupakan mata kuliah wajib atau pilihan, hanya ada berupa tanda bintang (*) pada beberapa mata kuliah. Sejumlah mata kuliah tersebut dapat dikelompokkan dalam mata kuliah matematika, mata kuliah pendidikan, mata kuliah umum, dan mata kuliah dalam bentuk teori atau praktek.

Salah satu mata kuliah yang menjadi kajian peneliti adalah kalkulus diferensial. Dalam deskripsinya, mata kuliah ini memuat beberapa materi meliputi sistem bilangan real, fungsi dan grafik, limit fungsi, kekontinuan fungsi, turunan fungsi, dan aplikasi turunan (lihat Gambar 1). Khusus pada kajian yang peneliti lakukan, fokus pada materi limit fungsi. Dari urutan materi pada deskripsi mata kuliah, limit fungsi ini dipelajari setelah mempelajari dua pokok materi lain yaitu sistem bilangan real, dan fungsi dan grafik. Hal ini menunjukkan bahwa kedua materi ini merupakan materi prasyarat yang harus dipenuhi oleh mahasiswa sebelum belajar limit fungsi. Kedua materi ini juga menjadi pondasi dalam memahami konsep limit fungsi. Meskipun dalam deskripsi mata kuliah tidak dijabarkan secara mendetail topik apa saja yang akan dipelajari pada materi prasyarat tersebut. Dengan adanya materi pengantar sebelum mempelajari limit fungsi, setidaknya kita memahami bahwa dalam mempelajari limit fungsi harus ada penguasaan materi lainnya yang mendukung konsep limit fungsi dan materi selanjutnya.

20	Kalkulus Diferensial SKS 3 (3-0-0)	Matakuliah ini memberikan pengetahuan bagi mahasiswa tentang kalkulus diferensial yang meliputi: sistem bilangan real, fungsi dan grafik, limit fungsi, kekontinuan fungsi, turunan fungsi, aplikasi turunan, dan terampil menggunakan dalam penyelesaian masalah
----	---------------------------------------	---

Gambar 1. Deskripsi mata kuliah kalkulus diferensial

Dokumen kedua, distribusi mata kuliah program studi pendidikan matematika, memuat distribusi mata kuliah per semester, mulai semester satu sampai dengan semester delapan. Selain itu, terdapat mata kuliah wajib dan juga mata kuliah pilihan beserta kode mata kuliah yang menunjukkan mata kuliah program studi, mata kuliah fakultas, atau mata kuliah umum. Terdapat 23 (dua puluh tiga) jenis mata kuliah pilihan yang disediakan menurut rumpun peminatan yang dapat dipilih mahasiswa sesuai dengan minat mereka. Adapun ketentuan mengambil mata kuliah pilihan minimal 10 SKS (Sistem Kredit Semester) selama perkuliahan. Jumlah SKS setiap mata kuliah ini adalah sama yaitu dua SKS.

Sajian pada semester pertama terdapat 9 (sembilan) mata kuliah dalam bentuk paket yang wajib dipilih dan diikuti mahasiswa dengan jumlah 22 SKS. Pada semester kedua terdapat sepuluh mata kuliah yang juga dalam bentuk paket berjumlah 22 SKS. Hal ini dikarenakan adanya peraturan tentang beban studi minimum mahasiswa pada tahun pertama untuk sarjana yang ditetapkan oleh tim penyusun panduan akademik yaitu sebesar 36 (tiga puluh enam) SKS. Untuk semester berikutnya yaitu mulai semester tiga, beban studi mahasiswa ditetapkan berdasarkan Indeks Prestasi Semester (IPS) yang diperoleh mereka. Daftar mata kuliah pada semester pertama (lihat Gambar 2) sangat bervariasi yang terdiri atas mata kuliah pendidikan matematika, mata kuliah pendidikan, dan mata kuliah umum. Distribusi mata kuliah per semester ini dilakukan dengan memperhatikan semua pengelompokan yang telah ditentukan oleh tim penyusun kurikulum program studi.

Semester I / Ganjil							
No	Kode MK	Mata Kuliah	SKS	SKS		Ket.	Prasyarat
				T	P		
1	PMA101	Aljabar Elementer	3 (3-0-0)	√			-
2	PMA111	Geometri Bidang dan Ruang	3(3-0-0)	√			-
3	PMA113	Kalkulus Diferensial	3 (3-0-0)	√			-
4	PMA107	Trigonometri	3 (3-0-0)	√			-
5	PMA109	Logika Matematika	2 (2-0-0)	√			-
6	EDU101	Landasan Pendidikan	2 (2-0-0)	√			-
7	EDU102	Psikologi Pendidikan	2 (2-0-0)	√			-
8	MKS101	Bahasa Indonesia	2 (2-0-0)	√			-
9	MKS106	Pengetahuan Lingkungan dan Kebencanaan	2 (2-0-0)	√			-
10	MKS107	Pembinaan Karakter I	0 (0-0-0)				
			22	22	0		

Gambar 2. Distribusi mata kuliah pada semester pertama

Mata kuliah kalkulus diferensial terdapat pada semester pertama perkuliahan dengan bobot 3 (tiga) SKS. Hal ini menunjukkan bahwa tidak ada mata kuliah prasyarat untuk mengikuti mata kuliah tersebut. Materi pokok yang dipelajari dalam kalkulus diferensial adalah limit dan turunan. Akan tetapi, untuk mempelajari materi tersebut harus ada penguasaan dan pemahaman konsep dasar matematika yang menjadi pendukung dalam memahami konsep limit fungsi seperti sistem bilangan real, ketaksamaan, nilai mutlak, dan fungsi. Meskipun mata kuliah ini berada di tahun pertama perkuliahan, khususnya pada semester satu, tetapi dipelajari bersamaan dengan mata kuliah aljabar elementer yang diharapkan dapat mendukung pembelajaran kalkulus diferensial.

Deskripsi mata kuliah kalkulus diferensial menunjukkan bahwa sebelum mempelajari konsep limit fungsi terdapat materi dasar yang dipelajari yaitu sistem bilangan real dan fungsi. Hal ini sangat mendukung dan membantu mahasiswa dalam mempelajari limit fungsi. Mata kuliah kalkulus diferensial ini merupakan mata kuliah bersifat baru bagi mahasiswa. Apalagi tahun pertama perkuliahan merupakan masa transisi dari dua institusi yang mempunyai sistem belajar yang berbeda. Selain itu, kajian materinya juga akan berbeda dengan sajian materi yang dipelajari saat di sekolah.

Pembelajaran saat sekolah, siswa lebih banyak belajar limit fungsi secara prosedural karena tuntutan untuk berhasil mengikuti ujian nasional. Berbeda dengan saat perkuliahan, mereka dituntut tidak hanya belajar untuk memahami materi secara prosedural tetapi juga secara konsep. Ditambah lagi, adanya materi pendukung yang harus dipelajari sebelum limit fungsi seperti bilangan riil dan fungsi. Hal ini dapat memudahkan dalam mempelajari materi limit fungsi dan materi selanjutnya. Melalui proses belajar ini, mereka dapat mereview dan mempelajari kembali konsep yang telah dipelajari ketika sekolah serta dapat mengembangkan pengetahuan yang baru.

Gambaran dan penjelasan dari kedua dokumen yaitu deskripsi dan distribusi mata kuliah program studi sangat mendukung dalam mempelajari limit fungsi yang terdapat pada mata kuliah kalkulus diferensial, meskipun penjelasannya masih secara umum dan singkat. Dengan adanya panduan ini, pembelajaran materi limit fungsi akan menjadi terarah. Pengajar dalam hal ini dosen mata kuliah kalkulus dapat menambahkan atau mengaitkan konsep limit fungsi yang diajarkan dengan konsep terkait, serta materi pendukungnya. Hal ini bertujuan untuk mendapatkan pemahaman konsep limit fungsi secara utuh dan luas tetapi mendalam.

Materi Limit Fungsi dalam Buku Teks

Ada sejumlah buku teks yang umumnya digunakan di perguruan tinggi untuk mata kuliah Kalkulus Diferensial. Salah satunya adalah buku yang sudah diterjemahkan dengan judul Kalkulus dan Geometri Analitis Jilid 1 Edisi Kelima tahun 1987 karangan Edwin J. Purcell dan Dale Varberg (Purcell & Varberg, 1987). Buku ini juga menjadi salah satu buku rujukan dalam perkuliahan kalkulus diferensial yang digunakan oleh dosen dan mahasiswa yang menjadi subjek dalam penelitian ini.

Materi pokok yang terdapat dalam buku Kalkulus dan Geometri Analitis yang ditelusuri dalam penelitian ini adalah limit, turunan, dan integral. Untuk materi fungsi dan limit terdapat pada bab kedua setelah bab pendahuluan dan selanjutnya pada bab ketiga membahas tentang materi turunan. Bab pendahuluan memuat materi sistem bilangan riil; desimal, kerapatan, kalkulator; ketaksamaan; nilai mutlak, akar kuadrat, kuadrat; sistem koordinat persegi panjang; garis lurus; dan grafik persamaan. Materi yang dipelajari pada bab pendahuluan ini dapat dikatakan sebagai materi pra kalkulus. Hal ini dikarenakan materi tersebut sangat menunjang dalam mempelajari dan memahami materi limit dan turunan, bahkan materi selanjutnya. Selain itu, penjelasan materi pada bagian ini sangat lengkap, jelas, dan mendalam, serta beberapa disajikan dalam bentuk grafik.

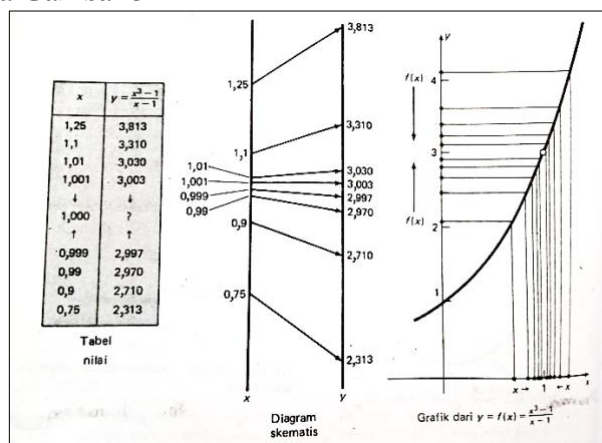
Bab kedua yaitu fungsi dan limit, mencakup materi tentang fungsi dan grafiknya; operasi pada fungsi; fungsi trigonometri; pendahuluan limit; pengkajian mendalam tentang limit; teorema limit; dan kekontinuan fungsi. Dari urutan materi tersebut dapat diketahui bahwa konsep limit fungsi dapat dipelajari setelah melewati sejumlah materi lainnya yang mendukung konsep tersebut. Misalnya adalah fungsi dan grafik. Apabila konsep fungsi dan cara menggambarkan grafik suatu fungsi dapat dipahami dengan baik maka pemahaman ini sangat membantu dalam memahami konsep limit dan menyelesaikan limit dengan menggunakan sketsa grafik.

Analisis isi buku teks kalkulus khususnya pada materi limit fungsi dengan menggunakan pendekatan *praxeology*. Kajian *praxeology* ini dilakukan pada setiap sajian materi, tugas berupa konsep, contoh soal, atau soal-soal latihan dilakukan mengikuti tahapan penyajian materi dalam buku kalkulus. Dalam artikel ini disajikan hanya dua sub materi yaitu pemahaman limit secara intuitif, dan limit-limit sepihak.

a) *Pemahaman Limit secara Intuisi*

Sebelum sajian materi pemahaman limit secara intuitif, terdapat sekilas pengantar tentang contoh penggunaan kata limit dalam bahasa sehari-hari. Contoh yang diberikan adalah “saya mendekati batas kesabaran saya”. Pada bagian ini disebutkan bahwa penggunaan seperti itu mempunyai hubungan dengan kalkulus tetapi tidak banyak.

Sajian materi dalam pendahuluan limit diawali dengan pemahaman limit secara intuitif dengan memberikan contoh suatu fungsi bentuk pecahan atau fungsi rasional, $f(x) = \frac{x^3-1}{x-1}$. Disebutkan bahwa fungsi tersebut tidak terdefinisi pada saat $x = 1$ karena menghasilkan $f(x)=0/0$ yang tidak mempunyai arti. Oleh karena itu, untuk menghindari hal tersebut dilakukan penelusuran tentang apa yang terjadi pada $f(x)$ ketika x mendekati satu. Dengan kata lain, muncul pertanyaan apakah $f(x)$ mendekati beberapa bilangan tertentu bilamana x mendekati 1? Dalam hal ini, terdapat tiga hal yang dapat dilakukan untuk menelusuri permasalahan tersebut, yang disajikan dalam buku. Ketiga cara tersebut terdiri atas menghitung beberapa nilai $f(x)$ untuk x mendekati 1, menunjukkan nilai tersebut dalam sebuah diagram skematis, dan mensketsakan grafik $y = f(x)$ seperti ditunjukkan pada Gambar 3.



Gambar 3. Tiga cara mengetahui limit $f(x)$ saat x mendekati 1 (Purcell & Varberg, 1987)

Ketiga cara yang disajikan di atas menunjukkan hasil dan kesimpulan yang sama yaitu $f(x)$ mendekati 3 saat x mendekati 1. Dalam lambang matematis dituliskan $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3-1}{x-1} = 3$, dengan cara bacanya “limit dari $\frac{x^3-1}{x-1}$ untuk x mendekati 1 adalah 3”. Penjabaran dari fungsi tersebut juga dilakukan dengan menguraikan selisih pangkat tiga sehingga diperoleh hasil yang sama,

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 1}{x - 1} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x - 1)(x^2 + x + 1)}{x - 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} (x^2 + x + 1) = 1^2 + 1 + 1 = 3 \end{aligned}$$

Dengan aturan $\frac{x-1}{x-1} = 1$ di mana $x \neq 1$.

Penyajian awal pada kasus ini belum dijelaskan secara eksplisit dan jelas tentang pengertian dari kata limit. Hanya ada percobaan pada sebuah definisi tentang pengertian limit secara intuitif yaitu:

“Untuk mengatakan bahwa $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = L$ berarti bahwa bilamana x dekat tetapi berlainan dari c , maka $f(x)$ dekat ke L ”

Penyelesaian percobaan ini dilakukan dengan tidak mensyaratkan sesuatu agar tepat benar di c . Fungsi f bahkan tidak perlu terdefinisi di c . Dalam hal ini, pemikiran tentang limit dihubungkan dengan perilaku suatu fungsi di sekitaran c , bukan tepat di c . Dengan kata lain, dalam memaknai limit digunakan kata dekat. Untuk menjelaskan makna dekat dan juga seberapa dekat, pada bagian

ini dalam buku teks kalkulus disajikan tujuh contoh soal dan penyelesaian. Soal-soal tersebut dimulai dengan contoh fungsi sederhana sampai dengan fungsi rasional. Dua soal dan penyelesaian diantaranya seperti penjelasan berikut.

a. Cari $\lim_{x \rightarrow 3} (4x - 5)$

Penyelesaian: bilamana x dekat 3 maka $(4x - 5)$ dekat terhadap
 $4 \cdot 3 - 5 = 7$. Dituliskan $\lim_{x \rightarrow 3} (4x - 5) = 7$

b. Cari $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - x - 6}{x - 3}$

Penyelesaian: perhatikan bahwa $\frac{(x^2 - x - 6)}{x - 3}$ tidak terdefinisi di $x = 3$, tetapi hal itu tidak ada masalah. Untuk mendapatkan gagasan tentang apa yang terjadi bilamana x mendekati 3, dapat digunakan beberapa nilai x yang dekat 3, misalnya di 3,1; 3,01; 3,001 dan seterusnya. Selain itu, dapat menggunakan sifat aljabar untuk menyederhanakan masalah tersebut.

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - x - 6}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x - 3)(x + 2)}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3} (x + 2) = 3 + 2 = 5$$

Karena $x \neq 3$, maka bisa digunakan metode pencoretan, yaitu mencoret $(x - 3)$ pada pembilang dan penyebut.

Berdasarkan penjelasan di atas, limit dapat diartikan dengan kata dekat atau mendekati. Dalam mengetahui suatu limit fungsi akan mendekati apa atau nilai berapa, maka cara yang dilakukan adalah dengan mensubstitusikan nilai dari variabel yang didekati ke dalam fungsi yang diketahui. Apabila proses substitusi yang dilakukan menghasilkan bentuk $\frac{0}{0}$ maka dilakukan penjabaran seperti pemfaktoran dari bentuk fungsi tersebut untuk menghindari hasilnya $\frac{0}{0}$.

Sebagai pendahuluan limit, pengenalan tentang limit masih kurang lengkap, apalagi dalam mengaitkan limit dengan konteks masalah. Sajian materi langsung pada contoh fungsi rasional dan dilanjutkan dengan pendekatan limit untuk menghindari hasilnya berbentuk $\frac{0}{0}$. Hal ini tidak salah, tetapi mengantarkan pengenalan konsep limit dengan konteks masalah dalam bidang matematika maupun bidang lainnya yang juga menggunakan konsep limit diharapkan dapat memudahkan peserta didik memahami dan membedakan penggunaan konsep limit. Misalnya, konsep limit dalam kehidupan sehari-hari yang tidak selalu bermakna sama dengan konsep limit dalam matematika.

Cara membaca definisi limit, $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = L$ juga masih terjadi perbedaan. Pada buku ini dijelaskan cara membacanya dengan “bilamana x dekat tetapi berlainan dari c , maka $f(x)$ dekat ke L ”. Apostol (1967) dalam bukunya berjudul *Calculus* menuliskan cara baca yaitu “limit dari $f(x)$, bilamana x mendekati c , adalah sama dengan L ” atau “ $f(x)$ mendekati L bilamana x mendekati c ”. Hal ini juga dapat dituliskan tanpa menggunakan ekspresi limit yaitu $f(x) \rightarrow L$ bilamana $x \rightarrow c$.

Bagian awal pendahuluan limit ini, penulis buku ini memberikan pengantar untuk memahami konsep limit dengan cara bertahap. Meskipun contoh penggunaan kata-kata limit dalam kehidupan sehari-hari tidak dijelaskan secara lengkap terkait kesesuaian kata tersebut dengan konsep limit dalam matematika. Hal ini juga menunjukkan bahwa penyajian materi untuk tingkat siswa sekolah menengah dengan mahasiswa di tingkat universitas terdapat perbedaannya.

Tingkat sekolah, materi yang diajarkan lebih banyak secara kontekstual untuk memudahkan mereka dalam memahami materi matematika. Hal ini juga sesuai dengan tahap perkembangan anak. Secara konsep, materi tidak dijelaskan secara lengkap dan mendalam, hanya sekedar siswa mengetahui tentang konsep tersebut. Selain itu, setiap materi yang dibahas lebih difokuskan pada penyelesaian soal-soal secara procedural. Fakta informasi ini didasarkan pada pengalaman penulis dalam melakukan studi pendahuluan di sekolah menengah. Analisis praxeology yang dilakukan pada bagian pemahaman limit secara intuisi dapat dilihat pada Tabel 1.

Tabel 1. Analisis praxeology pada pemahaman limit secara intuisi

<i>Task design</i>	<i>Teknik</i>	<i>Logos</i>
Pendahuluan limit	<ul style="list-style-type: none"> - Menyatakan topik yang dibahas sebelum limit sebagai pra kalkulus - Contoh penggunaan perkataan limit dalam bahasa sehari-hari 	Pengenalan limit secara singkat
Pandang fungsi yang ditentukan oleh rumus $f(x) = \frac{x^3 - 1}{x - 1}$	<ul style="list-style-type: none"> - Menunjukkan $f(x)$ tidak terdefinisi saat $x = 1$ karena menghasilkan bentuk $\frac{0}{0}$ - Menghitung nilai $f(x)$ saat x mendekati 1 - Menggunakan tabel nilai - Menggambar diagram skematis - Mensketsakan grafik $y = f(x)$ - Melakukan operasi aljabar dengan menguraikan selisih pangkat tiga - Membuat kesimpulan dari beberapa cara tersebut 	Pengenalan limit fungsi dengan contoh fungsi yang tidak terdefinisi pada titik yang didekati.
Definisi limit secara intuisi	<ul style="list-style-type: none"> - Memberikan definisi limit secara intuisi 	Definisi yang disepakati oleh matematikawan
Penyajian 7 contoh soal mulai fungsi aljabar sederhana hingga fungsi trigonometri	<ul style="list-style-type: none"> - Operasi sederhana - Pemfaktoran - Perkalian sekawan - Menggunakan tabel nilai - Substitusi langsung - Mensketsakan grafik fungsi - Memberikan penjelasan dari setiap tahapan 	Pemahaman masalah limit secara bertahap dengan menggunakan teknik penyelesaian yang beragam

Tingkat perguruan tinggi, materi yang diajarkan sudah mulai mengarah ke abstrak dan lebih menekankan pada pemahaman konsep. Dari penyajian dalam buku ini juga dapat dilihat bahwa materi yang dipaparkan dengan mengarahkan kemampuan berpikir mahasiswa dalam memahami konsep dan menyelesaikan masalah yang diberikan secara bertahap. Pengenalan konsep limit diawali dengan menyajikan sebuah contoh fungsi ($f(x) = \frac{x^3-1}{x-1}$) yang dilengkapi dengan cara penyelesaian dan juga menampilkan beberapa grafik dari fungsi tersebut. Fungsi yang diberikan ini merupakan fungsi rasional. Terdapat suatu aturan yang harus diperhatikan dalam menyelesaikan fungsi ini yaitu bagian penyebut tidak boleh bernilai nol. Apabila penyebut bernilai nol maka fungsi tersebut tidak mempunyai arti. Untuk fungsi ini, saat $x = 1$, tidak hanya penyebut bernilai nol tetapi juga pembilang dengan bentuk $0/0$. Dari kasus inilah diperkenalkan konsep limit dengan menelusuri apa yang terjadi pada $f(x)$ saat x mendekati 1.

Menelusuri yang terjadi pada $f(x)$ saat x mendekati 1, dapat dilakukan dengan mengambil beberapa nilai x yang mendekati 1 sehingga diperoleh nilai $f(x)$. Dalam penyajian buku teks ini disebutkan empat cara untuk mengetahui bahwa $f(x)$ akan mendekati suatu nilai yaitu 3 saat x mendekati 1. Dengan adanya sajian beberapa cara tersebut, mahasiswa dapat memahami konsep limit dengan mudah pada tahap awal pembelajaran. Selain itu, terdapat penyajian beberapa contoh soal yang bervariasi dengan tingkat kesulitan yang bertahap. Pengenalan konsep limit secara intuisi atau tidak formal ini dapat mengantarkan mereka untuk mudah memahami konsep limit secara formal.

b) *Limit-Limit Sepihak*

Sebelum menuliskan definisi limit kiri dan limit kanan, dipaparkan penjelasan tentang contoh limit fungsi yang merupakan contoh dari bagian sebelumnya yaitu $\lim_{x \rightarrow 2} \llbracket x \rrbracket$. Fungsi tersebut mempunyai lompatan pada setiap bilangan bulat, yang mengakibatkan limit tidak ada pada setiap titik lompatan. Dari contoh fungsi seperti demikian maka sangat wajar diperkenalkan dengan limit-

limit sepihak. Hal ini sangat jelas terlihat konsep limit kiri dan limit kanan dari grafik fungsi yang digambarkan.

Definisi limit kiri dan limit kanan yang disajikan sebagai berikut:

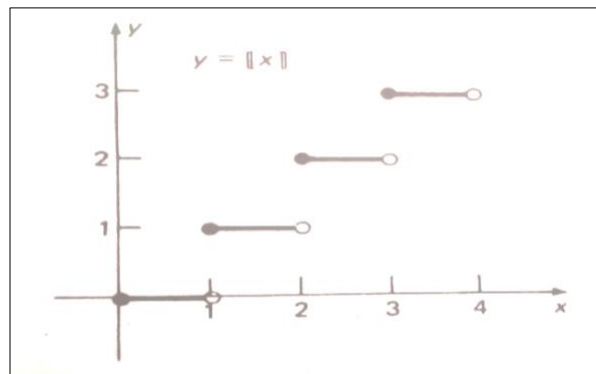
Untuk mengatakan bahwa $\lim_{x \rightarrow c^+} f(x) = L$ berarti bahwa bilamana x dekat tetapi pada sebelah kanan c , maka $f(x)$ adalah dekat ke L . Serupa, untuk mengatakan bahwa $\lim_{x \rightarrow c^-} f(x) = L$ berarti bahwa bilamana x dekat tetapi pada sebelah kiri c , maka $f(x)$ adalah dekat ke L .

Berdasarkan contoh, $\lim_{x \rightarrow 2} \llbracket x \rrbracket$ tidak ada, adalah benar. Hal ini dikarenakan limit kiri dan limit kanan berbeda yaitu $\lim_{x \rightarrow 2^-} \llbracket x \rrbracket = 1$ dan $\lim_{x \rightarrow 2^+} \llbracket x \rrbracket = 2$. Grafik dari limit fungsi tersebut yang berbentuk loncatan dapat dilihat pada Gambar 4.4.

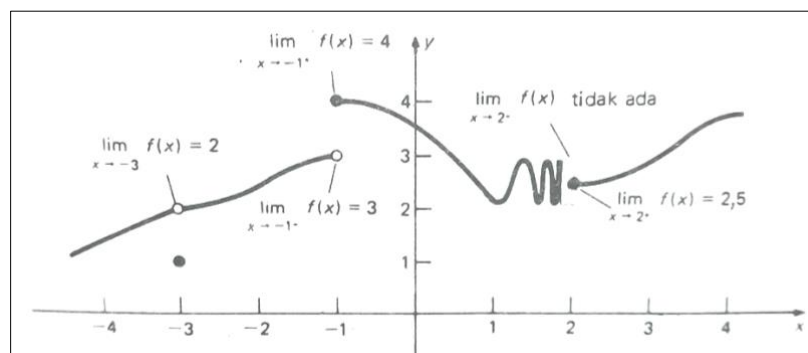
Setelah pemaparan tentang definisi dan contoh seperti hal di atas, dilanjutkan dengan menyertakan sebuah teorema tentang limit kiri dan limit kanan. Selain itu, ditambahkan sajian gambar (lihat Gambar 5) yang berbentuk grafik dari suatu fungsi dengan titik yang didekati berbeda-beda. Hal ini dapat dimaknai sebagai cara untuk memberikan penjelasan tambahan tentang konsep limit kiri dan limit kanan.

Teorema:

$$\lim_{x \rightarrow c} f(x) = L \text{ jika dan hanya jika } \lim_{x \rightarrow c^-} f(x) = L \text{ dan } \lim_{x \rightarrow c^+} f(x) = L$$



Gambar 4. Grafik fungsi $f(x) = \llbracket x \rrbracket$ (Purcell & Varberg, 1987)



Gambar 5. Contoh grafik dari fungsi $f(x)$ (Purcell & Varberg, 1987)

Berdasarkan Gambar 5, terdapat beberapa grafik dari fungsi $f(x)$ dengan titik x yang didekati berbeda-beda. Dalam hal ini tidak terdapat penjelasan apapun terkait makna dari grafik tersebut. Kurangnya penjelasan dari buku teks ini diharapkan dapat dibantu stimulus dari pendidik atau dosen yang mengajarkan mata kuliah kalkulus diferensial. Pendidik dapat menjelaskan setiap arti dari grafik tersebut sehingga mahasiswa dapat memahami dengan mudah. Selain itu, pendidik juga dapat meminta mahasiswa terlebih dahulu untuk mencari sendiri atau secara berkelompok tentang makna tersebut dan selanjutnya mendeskripsikan makna dari grafik fungsi $f(x)$ yang diketahui terkait konsep limit kiri dan limit kanan.

Bagian akhir sub bab ini diberikan sejumlah soal latihan yang bervariasi dengan tingkat kesukaran yang berbeda-beda. Terdapat soal dengan tujuan mencari limit secara langsung maupun dengan melakukan beberapa perhitungan aljabar, menggambarkan grafik dari fungsi yang diketahui, dan menentukan limit dari grafik yang diketahui.

Pemaparan singkat tentang konsep limit sepihak sangat mudah diikuti dan dipahami. Hal ini dikarenakan penyajian melalui sebuah contoh dengan menampilkan perbedaan yang sangat jelas antara limit kiri dan limit kanan. Meskipun pada contoh kedua hanya diberikan grafik fungsi tanpa adanya penjelasan, tetapi dengan memahami konsep limit sepihak dari contoh pertama akan sangat mudah menentukan limit-limit dari fungsi tersebut untuk setiap x yang didekati. Ini dapat menjadi tugas pengajar atau mahasiswa dalam mencari limit tersebut. Pada tahap ini juga dapat dilakukan untuk mengembangkan atau memperdalam pemahaman tentang konsep limit sepihak. Analisis praxeology yang dilakukan pada bagian limit-limit sepihak untuk limit kiri dan limit kanan dapat dilihat pada Tabel 2.

Tabel 2. Analisis praxeology pada limit-limit sepihak

<i>Task design</i>	<i>Teknik</i>	<i>Logos</i>
Definisi limit kiri dan limit kanan	<ul style="list-style-type: none"> - Memberikan contoh fungsi yang mempunyai lompatan (Gambar 5) - Menjelaskan limit sepihak - Menuliskan definisi limit kiri dan limit kanan - Menunjukkan teorema - Contoh tambahan dalam grafik 	Konsep limit sepihak <ul style="list-style-type: none"> - Limit tidak ada tetapi ada untuk limit kiri dan atau limit kanan - Limit ada berarti limit kiri sama dengan limit kanan

Di tingkat perguruan tinggi, komponen buku pelajaran – kurikulum – ujian, dapat dijadikan sebagai cerminan dari apa yang dipelajari mahasiswa dan apa yang diharapkan oleh lembaga pendidikan untuk dipelajari mahasiswa. Hardy (2009) menganalisis tugas yang diajukan dalam ujian akhir beserta jenis solusi yang diharapkan dapat disajikan oleh mahasiswa. Hal ini dapat membangun model persepsi mahasiswa dan instruktur tentang pengetahuan yang akan dipelajari (knowledge to be learned), mencari perbedaan antara model tersebut dan pengaruh tugas-tugas rutin dan tidak adanya wacana teoretis terhadap persepsi mereka. Dalam menghadapi masalah yang diajukan, mahasiswa telah menunjukkan bahwa pemikiran mereka bukanlah pemikiran matematis. Dalam hal ini, pilihan teknik yang digunakan untuk mengatasi masalah diyakini benar dan tepat. Dasar dari keyakinan ini yaitu kebiasaan yang dikomunikasikan secara eksplisit dalam solusi yang disajikan di kelas. Selain itu, adanya penggunaan teknik secara algoritmik yang didasarkan pada instruksi atau langkah penyelesaian yang terdapat pada buku teks. Berdasarkan hal tersebut, tidak adanya blok teoretis dapat mengakibatkan siswa mengalami kesulitan dalam mengingat urutan (Hardy, 2009).

Terdapat empat proses yang terlibat dalam transposisi pengetahuan yang efektif dalam pengajaran matematika atau dalam menulis buku pelajaran matematika yaitu kontekstualisasi, dekontekstualisasi, personalisasi, dan depersonalisasi. Meskipun penulis buku teks tampaknya menggunakan bentuk transposisi didaktik yang moderat, guru yang mengikuti buku teks secara tidak kritis mungkin akhirnya menggunakan bentuk ekstrim. Dengan demikian, penggunaan buku pelajaran matematika yang efektif di dalam kelas bergantung pada kewaspadaan epistemologis guru matematika. Dalam hal ini, teori transposisi didaktik memberikan model epistemologis yang dapat digunakan untuk menghindari pandangan fenomenologis dan ontologis yang ekstrem tentang sifat pengetahuan (Kang & Kilpatrick, 1992).

Proses transposisi didaktik memberikan gagasan yang berbeda tentang pengetahuan dengan menyoroti relativitas kelembagaan pengetahuan dan menempatkan masalah didaktik pada tingkat kelembagaan, di luar karakteristik individu dari lembaga tersebut (Bosch et al., 2005). Dari perspektif epistemologis, gagasan pengetahuan untuk diajarkan atau pengetahuan untuk dipelajari mungkin merupakan objek yang terdefinisi dengan baik. Namun, sudut pandang antropologis,

kesatuan gagasan tersebut terurai menjadi praksiologi yang berbeda, berbeda untuk siswa dan guru serta menjadi relatif terhadap institusi yang menggambarannya (Hardy, 2009).

KESIMPULAN

Pengetahuan yang akan diajarkan (*knowledge to be taught*) untuk konsep limit fungsi yang dikaji atau dianalisis berdasarkan beberapa sumber yaitu kurikulum program studi, dan buku teks kalkulus yang menjadi salah satu buku rujukan pada kelas kalkulus. Penyajian materi pada ketiga sumber tersebut terdapat perbedaan untuk urutan materinya. Mata kuliah kalkulus diferensial merupakan salah satu mata kuliah yang terdapat pada semester pertama perkuliahan di program studi Pendidikan matematika. Dengan demikian, penyajian maupun penyampaian materi diperlukan usaha tambahan karena mahasiswa masih berada pada masa transisi antara pembelajaran di sekolah dengan pembelajaran di perguruan tinggi. Deskripsi mata kuliah kalkulus diferensial memuat materi sistem bilangan riil, fungsi dan grafik, limit fungsi, kekontinuan fungsi, turunan fungsi, dan aplikasi turunan. Hal ini berbeda dengan penyajian materi pada RPS yang disusun oleh tim dosen pengampu mata kuliah kalkulus diferensial. Pada RPS, materi diawali dengan konsep limit fungsi dan limit tak hingga. Hal ini dapat menimbulkan hambatan belajar bagi mahasiswa karena untuk mempelajari limit fungsi diperlukan materi pendukung lainnya. Selain itu, pembelajaran limit fungsi selama di sekolah lebih banyak pada penyelesaian soal-soal secara procedural, yang sangat berbeda dengan belajar di tingkat perguruan tinggi.

Untuk sajian materi pada buku teks kalkulus, konsep limit fungsi diawali dengan pengenalan konsep tersebut secara intuisi atau tidak formal. Beberapa kasus diberikan untuk memperdalam konsep limit melalui grafik, analitik, dan numerik. Selanjutnya disajikan konsep limit secara mendalam menggunakan definisi formal. Dalam hal ini, penulis buku juga menyajikan definisi tersebut melalui grafik untuk mempermudah pemahaman tentang konsep limit fungsi menggunakan epsilon delta. Untuk materi limit tak hingga tidak disajikan setelah materi tentang limit di satu titik, limit sepihak atau teorema limit. Padahal konsep ini masih saling terkait dan berkesinambungan. Akan tetapi, penyajian materi limit tak hingga terpisah dari bab limit, yaitu pada bab penggunaan turunan setelah bab turunan itu sendiri. Hal ini menjadi salah satu hambatan didaktik apabila dilihat dari sajian urutan materinya karena materi tersebut terpisah jauh dari pembahasan materi limit fungsi di satu titik.

DAFTAR PUSTAKA

- Akar, N., & Işıksal-Bostan, M. (2022). The didactic transposition of quadrilaterals: the case of 5th grade in Turkey. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, <https://doi.org/10.1080/0020739X.2021.2022228>
- Bosch, M., Chevallard, Y., Gascón, J. (2005). Science or magic? The use of models and theories in didactics of mathematics. *Proceedings of CERME*.
- Bosch, M., Hausberger, T., Hochmuth, R., Kondratieva, M., & Winslow, C. (2021). External Didactic Transposition in Undergraduate Mathematics. *International Journal of Research in Undergraduate Mathematics Education*, 7, 140–162 <https://doi.org/10.1007/s40753-020-00132-7>
- Chevallard, Y. (1989). On didactic transposition theory: some introductory notes. In *International symposium on selected domains of research and development in mathematics education* (pp. 51–62). Bratislava. https://doi.org/10.1007/978-94-007-4978-8_48
- Cornu, B. (1991). Limits. In D. Tall (Ed.), *Advanced mathematical thinking* (pp. 153-166). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.
- Creswell, J. W. (2012). *Educational research. Planning, conducting and evaluating quantitative and qualitative research. Fourth Edition*. Boston: Pearson Education, Inc.
- Davis, R. B. & Vinner, S. (1986). The notion of limit: Some seemingly unavoidable misconception stages. *Journal of Mathematical Behaviour*, 5(3), 281-303.
- Ervynck G. (1981). Conceptual difficulties for first year students in the acquisition of the notion

- of limit of a function. *Actes du Cinquième Colloque du Groupe Internationale PME*, Grenoble, France, 330-333.
- Ferrini-Mundy, J., & Lauten, D. (1993). Teaching and learning calculus. In P. S. Wilson (Ed.), *Research ideas for the classroom: High school mathematics* (pp. 155–176). New York: Macmillan.
- Hardy, N. (2009). Students' perceptions of institutional practices: the case of limits of functions in college level calculus courses. *Educational Studies in Mathematics*, 72(3), 341–358. <https://doi.org/10.1007/s10649-009-9199-8>
- Henriksen, B. (2022). Didactic transposition of natural numbers in the first year of compulsory schooling: a case of comparative curricula analysis. *Twelfth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME12)*, Feb 2022, Bozen-Bolzano, Italy. (hal-03750194)
- Kang, W., & Kilpatrick, J. (1992). Didactic transposition in mathematics textbooks. *For the Learning of Mathematics*, 12(1), 2-7.
- Mokhtar, M. Z., Tarmizi, R. A., Ayub, A. F. M., & Nawawi, M. D. H. (2013). Motivation and performance in learning calculus through problem-based learning. *International Journal of Asian Social Science*, 3(9), 1999-2005.
- Oktaviyanthi, R., Herman, T., & Dahlan, J. A. (2018). How does pre-service mathematics teacher prove the limit of a function by formal definition? *Journal on Mathematics Education*, 9(2), 195-212. <https://doi.org/10.22342/jme.9.2.5684.195-212>
- Purcell, E. J. & Varberg, D. (1987). *Calculus with Analytic Geometry, 5th Edition*. Terjemahan. Susila, I. N., Kartasasmita, B., & Rawuh. Kalkulus dan Geometri Analitis Jilid 1 Edisi Kelima. Jakarta: Erlangga.
- Robert, A. (1982). 'L'acquisition de la notion de convergence des suites numeriques dans l'enseignement superieur'. *Recherches en Didactique des Mathematiques*, 3, 307-341.
- Sierpinska, A. (1987). Humanities students and epistemological obstacles related to limit. *Educational Studies in Mathematics*, 18(4), 371–397. <https://doi.org/10.1007/BF00240986>
- Tall, D. (1980). The notion of infinite measuring number and its relevance in the intuition of infinity, *Educational Studies in Mathematics*, 11(3), 271-284. <https://doi.org/10.1007/BF00697740>
- Tall, D. (1992). The transition to advanced mathematical thinking: Functions, limits, infinity and proof. In *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 495–511). Macmillan, New York: Grouws D.A. (ed.) Handbook.
- Tall, D., & Vinner, S. (1981). Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity. *Educational Studies in Mathematics*, 12(2), 151–169. <https://doi.org/10.1007/BF00305619>
- Zollman, A. (2014). University students' limited knowledge of limits from calculus – through differential equations. *The mathematics education for the future project: Proceedings of the 12th International Conference*, (pp. 693-698).