

Studi transposisi didaktik terhadap mahasiswa calon guru matematika: Tinjauan pada konteks *knowledge to be taught* dalam konsep turunan

Aditya Prihandhika*

Universitas Islam Al-Ihya Kuningan, Kuningan, Jawa Barat, Indonesia, 45552

Ade Evi Fatimah

STKIP Al Maksum, Langkat, Sumatera Utara, Indonesia, 20814

Tatang Sujata

Universitas Islam Al-Ihya Kuningan, Kuningan, Jawa Barat, Indonesia, 45552

*Corresponding Author: adityaprihandhika@unisa.ac.id

Abstract. The concept of derivatives is an important concept in the field of Calculus to be studied and taught at school and university levels. However, understanding derived concepts that do not fully involve the meaning of various representations has the potential to trigger a combination of concept descriptions with formal concept definitions as well as learning challenges or learning obstacles in epistemological, ontogenic and also didactic aspects. Therefore, the research carried out aims to observe the context of the knowledge that will be taught as one of a series of didactic transposition processes in order to obtain transpositional knowledge that is relevant to be taught. The research method used is qualitative research with a hermeneutic phenomenological approach. The participants involved in the research were 38 students who were prospective mathematics teachers from one of the universities in West Java. The research results show that there are inaccuracies in the presentation of ideas and concepts related to the knowledge to be taught, especially in the definition of derivative concepts. The mismatch between formal concept definitions and participant concept descriptions in learning by referring to mathematics textbooks which are used as the main reference results in learning obstacles for the subjects so that there is a need for repersonalization and recontextualization as an effort to produce more meaningful knowledge.

Historis Artikel:

Diterima: 30 Oktober 2023

Direvisi: 25 November 2023

Disetujui: 31 Desember 2023

Keywords:

Derivative concept;
Knowledge to be Taught;
concept image; concept
definition; learning
obstacles

Sitasi: Prihandhika, A., Fatimah, A. E., & Sujata, T. (2023). Studi transposisi didaktik terhadap mahasiswa calon guru matematika: Tinjauan pada konteks *knowledge to be taught* dalam konsep turunan. *Journal of Didactic Mathematics*, 4(3), 168-179. Doi: 10.34007/jdm.v4i3.1966

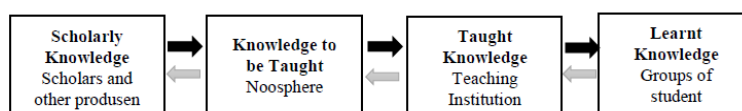
PENDAHULUAN

Kajian terhadap konsep fungsi, limit, turunan, kontinuitas, dan integral telah dikenal luas sebagai konsep matematika tingkat tinggi yang memerlukan pemahaman dan pemaknaan dari berbagai representasi (Bezuidenhout, 2001; Cornu, 1991; Aspenwell & Miller, 1997; Duru, 2011; Sulastri, 2023). Secara umum konsep-konsep tersebut termasuk ke dalam bidang kalkulus yang mempelajari tentang perubahan sebagaimana bidang geometri yang mempelajari bentuk atau bidang Aljabar yang mempelajari operasi dan penerapannya untuk menyelesaikan masalah dengan berbagai macam persamaan (Aspinwell & Miller, 1997). Berknaan dengan konsep Turunan, definisi dari konsep tersebut didapat dengan mengambil $I \subseteq \mathbb{R}$ pada interval, $f: I \rightarrow \mathbb{R}$, dan $c \in I$. Oleh karena itu, dapat dikatakan bahwa sebuah bilangan riil merupakan turunan f di c jika setiap $\varepsilon > 0$ terdapat $\delta(\varepsilon) > 0$ sehingga jika $x \in I$ menjadikan $0 < |x - c| < \delta(\varepsilon)$, maka $\left| \frac{f(x) - f(c)}{x - c} - L \right| < \varepsilon$. Pada kondisi ini dapat dikatakan bahwa f terdiferensiasi di c , dan dituliskan $f'(c)$ untuk L . Dengan kata lain, turunan dari f di c dapat didefinisikan dengan limit $f'(c) = \lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c}$

asalkan limitnya ada (Bartle & Sherbert, 2000; Purcell & Varberg, 2000). Konsep turunan berkaitan dengan kekontinuan di satu titik yang didefinisikan bahwa f kontinu di c jika beberapa selang terbuka di sekitar c berada dalam daerah asal f dan $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = f(c)$. Definisi tersebut memberikan syarat, di antaranya: 1) $\lim_{x \rightarrow c} f(x)$ ada; 2) $f(c)$ ada yaitu c berada dalam domain f ; 3) $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = f(c)$. Jika salah satu dari ketiga fungsi tersebut tidak terpenuhi, maka f tak kontinu (diskontinu) di c .

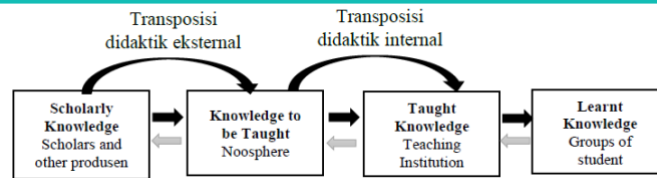
Selain itu, terdapat banyak definisi berbeda untuk menjelaskan pengertian konsep turunan yang tidak terlepas dari bidang Kalkulus untuk mereduksi permasalahan yang kompleks menjadi aturan dan aturan yang lebih sederhana dengan prosedur dengan aplikasi di bidang yang paling beragam (Berry & Nyman, 2003; Fuentealba, 2019). Berdasarkan konsep limit, turunan merupakan batas rasio kenaikan variabel bebas dari kenaikan fungsi sedangkan perubahan variabel terikat mendekati nol (Fuentealba, 2019). Dari pengertian geometri, turunan suatu fungsi sama dengan garis singgung sudut antara titik-titik fungsi yang ditunjukkan oleh sumbu x sebagai gradien garis singgung tersebut (Karadeniz, 2018). Hughes-Hallett, Gleason, dan McCallum (2020) mendefinisikan turunan menggunakan hubungan antara kecepatan yang digunakan dalam bidang fisika dan laju perubahan rata-rata yang digunakan dalam bidang matematika ekonomi, terutama pada konsep nilai marjinal.

Berdasarkan kurikulum pendidikan, konsep turunan menjadi bagian dari objek matematika yang penting untuk dipelajari (Permendikbud, 2016). Skemp (2012) mengungkapkan bahwa konsep matematika tidak dapat dipelajari secara langsung dari lingkungan sehari-hari, tetapi dapat dipelajari secara tidak langsung melalui proses reflektif dari ahli matematika dan konsep yang telah diperoleh sehingga pembelajaran matematika pada tahap awal sangat bergantung pada pengajaran. Polya (2004) menyatakan bahwa salah satu tugas penting seorang guru dalam mengajar adalah membantu siswa. Oleh karena itu, agar seorang guru dapat membantu siswa secara wajar dan hendaknya menempatkan dirinya sebagai siswa agar dapat memahami cara berpikir dan melihat permasalahan dari sudut pandang siswa serta bertanya pada dirinya sendiri langkah apa yang akan dipilih (Brousseau, 2002; Sbaragli, 2013). Peralihan item pengetahuan dari saat diproduksi dan digunakan, dipilih dan direncanakan untuk diajarkan, hingga benar-benar diajarkan di lembaga pendidikan tertentu (Chevallard & Bosch, 2014). Pemahaman tersebut menunjukkan bahwa objek matematika yang diajarkan di sekolah, berasal dari matematika ilmiah yang dihasilkan oleh para ahli matematika kemudian diadaptasi oleh perancang kurikulum, diajarkan oleh pendidik, dan dipelajari oleh siswa (Chevallard & Bosch, 2014; Bergsten et al., 2010). Proses perpindahan dari pengetahuan yang diciptakan dan diterapkan ke pengetahuan yang diajarkan dikenal dengan istilah transposisi didaktik (Brousseau, 2002; Chevallard, 1988) yang ditampilkan pada Gambar 1.



Gambar 1. Proses transposisi didaktik

Proses transposisi didaktik tersebut dilakukan dengan transposisi eksternal dan transposisi internal. Transposisi didaktik eksternal menggambarkan peralihan dari matematika ilmiah ke matematika pendidikan. Transposisi didaktik eksternal ini merupakan transformasi, penafsiran, dan penjabaran kembali ilmu pengetahuan menjadi suatu objek terbuka. Akibat penjabaran ulang tersebut, tidak semua matematika sains dimasukkan dalam kurikulum sekolah sehingga terdapat perbedaan antara literatur ilmiah dan teks didaktik dengan tugas pengajaran tertentu. Proses ini dilakukan oleh desainer dan penulis buku teks matematika untuk sekolah dasar dan menengah. Selain itu, perpindahan matematika sekolah ke objek pengajaran di kelas dalam konteks proses belajar mengajar dilakukan oleh instruktur sebagai bagian dari proses yang dikenal dengan transposisi didaktik internal (Paun, 2006).



Gambar 2. Internal dan eksternal dalam proses transposisi

Pada saat perancang kurikulum, penulis buku teks matematika sekolah, dan pengajar berusaha mengubah objek ilmiah matematika menjadi objek pengajaran di sekolah, maka mereka harus menata ulang objek matematika tersebut sesuai dengan fungsinya yang dimaksudkan agar dapat diajarkan kepada siswa. Sementara itu, guru dan siswa akan menghadapi setidaknya dua tantangan signifikan di kelas, yaitu masalah manajemen kurikulum dan manajemen kelas (Paun, 2006). Manajemen kurikulum berkaitan dengan pengembangan ilmu pengetahuan, khususnya transformasi menjadi ilmu yang dapat diajarkan. Jika pengetahuan ilmiah adalah pengetahuan yang digunakan untuk mengembangkan pengetahuan baru sehingga menghasilkan kumpulan teori yang runtut, maka berbeda dengan pengetahuan yang diajarkan, yaitu pengetahuan yang dibawa ke dalam kerangka pengajaran di lingkungan sekolah (Chevallard, 1988). Pada proses ini, pengetahuan yang akan diajarkan diorganisasikan menjadi satu kesatuan yang utuh (Chevallard, 1988; Kang & Kilpatrick, 1992).

Objek matematika seperti definisi, teorema, pembuktian, permasalahan dan penyelesaian bukanlah objek utama yang harus disediakan dalam proses transfer pengetahuan. Matematika juga harus disajikan sebagai alat konseptual untuk mengkonstruksi objek matematika (Harel, 2008). Jika matematika dipandang sebagai alat konseptual untuk mengkonstruksi objek-objek matematika, maka pembelajaran matematika harus diarahkan pada proses penciptaan benda-benda tersebut agar siswa dapat memahami objek matematika tertentu dan menerapkannya dalam pemecahan masalah (Suryadi, 2019a). Namun hasil penelitian menunjukkan bahwa beberapa implementasi pembelajaran konsep turunan masih belum sampai pada pemahaman konsep dan masih cenderung pada pemahaman prosedural (Juter, 2011; Moru, 2020; Klisinska, 2009; Prihandhika, 2018). Selanjutnya studi pendahuluan yang dilakukan oleh Prihandhika (2020) menunjukkan bahwa terhadap beberapa calon guru matematika menunjukkan bahwa pemahaman terhadap konsep dasar turunan di tingkat matematika lanjut masih belum sampai pada pemaknaan dari berbagai representasi. Hal tersebut terlihat ketika beberapa partisipan dapat menggunakan persamaan turunan berdasarkan konsep limit, namun tidak dapat menjelaskan dari mana persamaan tersebut didapatkan. Kondisi tersebut tentunya dapat menjadi hambatan dalam proses pembelajaran sebagai kumpulan dari kesalahan-kesalahan yang berhubungan erat dengan pengetahuan yang dimiliki sebelumnya (Brousseau, 2002). Ernest (1991) menyatakan bahwa partisipan harus memahami suatu konsep matematika secara bermakna. Oleh karena itu, pada penelitian ini dilakukan tinjauan terhadap proses transposisi didaktis, khususnya transposisi eksternal pada konteks *knowledge to be taught* yang dilakukan untuk mengkaji pengetahuan yang akan diajarkan dalam konsep turunan sehingga diperoleh pengetahuan yang lebih bermakna sebagai upaya meningkatkan kualitas pembelajaran matematika.

METODE

Pada penelitian yang dilakukan, digunakan metode kualitatif yang bertujuan untuk mengeksplorasi dan memahami suatu makna dari seseorang atau kelompok dalam menjelaskan suatu masalah (Creswell, 2012). Lebih khusus lagi, penelitian ini menggunakan pendekatan *Interpretative Phenomenological Analysis* (IPA) untuk memaknai dan menginterpretasi definisi konsep turunan berdasarkan pengalaman siswa yang berhubungan erat dengan fenomenologi hermeneutik dengan berfokus pada pemaknaan terhadap pengalaman dalam mempelajari konsep turunan (Eatough & Smith, 2017; Ricoer, 1985, Aiyub, 2023). Sebanyak 38 partisipan mahasiswa calon guru matematika dari salah satu universitas yang ada di Jawa Barat, dilibatkan dalam penelitian ini.

Terdapat tiga butir soal yang memenuhi validitas dan realibilitas yang kemudian digunakan sebagai instrumen untuk memperoleh data terkait pemahaman konsep turunan. Selain itu, dilakukan observasi dan wawancara untuk menelaah konteks *knowledge to be taught* dalam proses transposisi eksternal. Pada tahapan analisis data, digunakan teori *concept image* dan *concept definition* yang digunakan untuk menggambarkan struktur kognitif total yang terkait dengan konsep, karakteristik, dan proses citra mental yang ada dalam pikiran individu (Vinner, 1983). Vinner (1991) dan menyatakan bahwa *concept image* adalah gambar non-verbal dalam pikiran seseorang dan menjadi representasi visual atau gambaran mental dari suatu konsep, kumpulan pengalaman dalam kehidupan sehari-hari serta teori *learning obstacles* atau hambatan belajar yang diakibatkan oleh tiga faktor, diantaranya *ontogenic obstacles*, *didactical obstacles*, dan *epistemological obstacles* (Brousseau, 2002). *Ontogenic obstacles* terjadi karena kurangnya kesiapan mental belajar anak. *Didactical obstacles* terjadi karena adanya kekurangan dalam kemampuan mengajar atau dapat juga terjadi karena kekeliruan dalam merancang proses pembelajaran. *Epistemological obstacles* terjadi karena siswa tidak dapat menyelesaikan permasalahan pada konteks/kondisi yang berbeda.

HASIL DAN PEMBAHASAN

Tinjauan terhadap *knowledge to be taught* berdasarkan *learning obstacles* pada mahasiswa calon guru matematika dilakukan dengan memberikan tes sebanyak tiga butir soal tentang konsep turunan. Jawaban tersebut dikonfirmasi kembali melalui wawancara klinis untuk mengetahui apakah terdapat kesenjangan antara *concept image* dengan *formal concept definition*. Adapun indikator yang ingin ditinjau adalah: 1) partisipan dapat menurunkan suatu fungsi; 2) partisipan dapat membedakan gradien garis dan gradien garis singgung pada representasi geometris; 3) dan partisipan dapat mendefinisikan konsep turunan sebagai kecepatan sesaat pada representasi paradigmatik fisik.

1. Tunjukkan bagaimanakah cara anda dalam melakukan satu kali penurunan pada fungsi

$$f(x) = x^2 + x - 4!$$

Pertanyaan pertama diajukan dengan tujuan untuk menyelidiki *concept image* partisipan ketika diminta untuk menurunkan suatu fungsi. Aktivitas kerja pada pertanyaan pertama menunjukkan bahwa semua peserta melakukan proses penurunan fungsi $f(x) = x^2 + x - 4$ menggunakan rumus umum $f'(x) = n \cdot x^{n-1}$ dengan hasil $2x + 1$. Ketika dikonfirmasi, dalam proses penurunan fungsi, semua peserta membayangkan dua sifat dalam gambaran mental mereka, yaitu rumus umum $f'(x) = n \cdot x^{n-1}$ dan rumus limit $f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$. Namun rumus limit tidak dipilih sebagai prosedur untuk memperoleh solusi karena memiliki langkah penyelesaian yang rumit jika dibandingkan dengan bentuk umum dari konsep turunan. Berdasarkan kecenderungan prosedur yang digunakan untuk menurunkan suatu fungsi, diketahui bahwa *concept image* partisipan tentang rumus umum $f'(x) = n \cdot x^{n-1}$ memiliki pengaruh yang sangat dominan.

2. Diketahui garis g memotong kurva f di titik A (2,4) dan titik B (3,9) seperti yang ditampilkan pada grafik.
 - a. Carilah gradien garis AB dan tentukan fungsi dari garis g!
 - b. Selidiki persamaan garis singgung di titik A pada kurva $f(x) = x^2$

Soal kedua bertujuan untuk mengetahui *concept image* partisipan tentang konsep-konsep yang berkaitan dengan konsep turunan, khususnya konsep yang membangun representasi geometris meliputi konsep fungsi, persamaan garis, gradien, dan garis tangen. Dari soal tersebut, peneliti ingin melakukan tinjauan apakah partisipan dapat membedakan gradien garis dengan gradien persamaan garis singgung. Sebanyak 55% partisipan mampu mendefinisikan prosedur untuk memecahkan masalah dan hanya 31% partisipan yang mampu melakukan prosedur untuk mendapatkan solusi atas semua pertanyaan yang diberikan dengan menggunakan sifat-sifat yang relevan dengan *formal*

concept definition, seperti rumus menentukan gradien dengan menggunakan $m = \frac{\Delta y}{\Delta x}$ atau $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$, rumus mencari persamaan garis berdasarkan salah satu koordinatnya adalah menggunakan $y - y_1 = m(x - x_1)$ dan persamaan garis berdasarkan dua koordinat dengan menggunakan $\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$, dan temukan persamaan garis singgung kurva $f(x) = x^2$ dengan menggunakan rumus $y - y_1 = m(x - x_1)$ untuk $m = f'(x)$.

3. Diketahui garis g memotong kurva f di titik A (2,4) dan titik B (3,9) seperti yang ditampilkan pada grafik.
 - a. Carilah gradien garis AB dan tentukan fungsi dari garis g !
 - b. Selidiki persamaan garis singgung di titik A pada kurva $f(x) = x^2$

Soal ketiga bertujuan untuk mengetahui gambaran konsep peserta tentang konsep turunan dari representasi fisis paradigmatik, khususnya kecepatan. Ada tiga aspek yang ingin dilihat pada pertanyaan ketiga, yaitu pemahaman dan makna peserta tentang kecepatan rata-rata pada selang waktu tertentu, kecepatan sesaat pada t detik, dan ketinggian maksimum atau titik stasioner pada fungsi $v(t) = -t^2 + 12t$. Untuk soal kelajuan rata-rata, sebanyak 10% peserta menggunakan prosedur untuk menyelesaikan soal dengan sifat $v = \frac{s}{t}$ atau $v = \frac{\Delta s}{\Delta t}$ rumus mencari kecepatan dengan membandingkan perubahan jarak dan waktu. Selanjutnya mengenai soal kecepatan sesaat, sebanyak 13% peserta menggunakan prosedur menjawab soal dengan sifat konsep turunan yaitu kecepatan $v'(t)$ pada $t = 4$. Pada aspek terakhir, sebanyak 24% partisipan menggunakan sifat $v'(t)=0$ untuk menentukan ketinggian maksimum atau titik diam suatu benda. Sedangkan sebanyak 48% partisipan langsung mensubstitusi fungsi sebagai prosedur untuk menyelesaikan masalah tanpa memperhatikan kondisi yang terdapat pada setiap soal. Berdasarkan temuan tersebut, secara umum diketahui bahwa *concept image* peserta masih memiliki gap yang besar dengan *formal concept definition* sehingga persentase peserta yang mampu menyelesaikan permasalahan konsep turunan pada representasi fisis paradigmatik masih di bawah 50%. Selanjutnya, peneliti melaksanakan wawancara klinis yang bertujuan untuk menegaskan kembali *concept image* partisipan melalui *concept definition* yang disampaikan selama wawancara, menggali proses berpikir, dan mengkaji pemaknaan partisipan dari berbagai representasi yang digunakan dalam konsep turunan. Wawancara klinis dilakukan kepada seluruh partisipan, namun penyampaian naskah wawancara pada bagian ini hanya ditunjukkan dari salah satu partisipan (P1) yang mewakili kecenderungan temuan terkait dengan konsep turunan.

Peneliti : “bagaimana definisi konsep turunan yang anda ketahui?”

P1 : “Konsep turunan berkaitan dengan penurunan dari fungsi yang dilambangkan dengan $f'(x) = n \cdot x^{n-1}$ atau $\frac{dy}{dx}$ ”

Peneliti : “apa maksud dari simbol tersebut?”

P1 : “Pada notasi $f(x)$, jumlah aksen menunjukkan jumlah penurunan fungsi. $f'(x)$, berarti fungsi diturunkan satu kali, $f''(x)$ diturunkan dua kali, dan seterusnya. Arti dari notasi $\frac{dy}{dx}$ adalah turunan dari y yang diambil terhadap x”

Peneliti : “apakah terdapat notasi lain yang anda ketahui?”

P1 : “tidak ada pa, saya hanya mengetahui dua notasi tersebut”

Peneliti : “adakah ide lain yang dapat anda jelaskan mengenai konsep turunan?”

P1 : “sementara pa, oh iya pa untuk menurunkan fungsi bisa juga digunakan $f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$ ”

Berdasarkan hasil wawancara klinis, ditemukan bahwa *concept image* berdasarkan *concept definition* yang disampaikan sangat dominan dalam representasi verbal. Partisipan yang

diwawancarai menjelaskan bahwa konsep turunan adalah konsep untuk menurunkan suatu fungsi dengan rumus $f'(x) = n \cdot x^{n-1}$. Partisipan juga memiliki pemahaman tentang rumus $f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$. Namun partisipan tersebut menegaskan bahwa tidak dapat menggunakan pemahaman tersebut sebagai prosedur untuk menurunkan suatu fungsi. Berdasarkan hasil jawaban atas pertanyaan yang diberikan dan hasil wawancara klinis diketahui bahwa partisipan mengalami hambatan epistemologis ketika memperoleh masalah konsep turunan yang memerlukan pemahaman tentang representasi grafis, representasi fisik paradigmatik, dan representasi simbolik. Selanjutnya, peneliti menelaah kurikulum, Rencana Pembelajaran Semester (RPS), dan modul pembelajaran yang digunakan oleh dosen pengampu mata kuliah kalkulus differensial untuk mengkaji apakah terdapat potensi *didactical obstacles* pada pembelajaran konsep turunan. Berikut sajian distribusi mata kuliah di setiap semester disertai dengan bobot SKS pada kurikulum program studi pada Gambar 3.

Mata Kuliah Wajib Prodi								
No	Kode MK	Nama MK	Rincian SKS			SKS	Semester	
			T	P	L		Gasal	Genap
1	PMATCW1901	Aljabar Linear Elementer	3			3		2
2	PMATCW1902	Analisis Real	3			3	5	
3	PMATCW1903	Bahasa Inggris untuk Matematika	2			2		2
4	PMATCW1904	Geometri Analitik	3			3	3	
5	PMATCW1905	Geometri Bidang	3			3	1	
6	PMATCW1906	Geometri Ruang	2			2		2
7	PMATCW1907	Geometri Transformasi	2			2		4
8	PMATCW1908	Kalkulus Differensial	3			3	1	
9	PMATCW1909	Kalkulus Integral	3			3		2
10	PMATCW1910	Kalkulus Lanjut	3			3	3	
11	PMATCW1911	Kapita Selekt Matematika Pendidikan Dasar	2			2		4
12	PMATCW1912	Kapita Selekt Matematika Pendidikan Menengah	2			2	5	
13	PMATCW1913	Matematika Diskrit	3			3	5	
14	PMATCW1914	Metode Numerik	2	1		3	5	
15	PMATCW1915	Multimedia Pendidikan Matematika	1	1		2		6
16	PMATCW1916	Pemrograman Komputer	2	1		3	3	
17	PMATCW1917	Pengantar Dasar Matematika	3			3	1	

Gambar 3. Sebaran kurikulum pendidikan di tempat penelitian

Berdasarkan kurikulum yang digunakan, kalkulus differensial diajarkan kepada mahasiswa di semester 1 sebagai mata kuliah dasar dengan bobot 3 sks yang menjadi prasyarat beberapa mata kuliah lainnya, dimaksudkan untuk memberi kemampuan pada mahasiswa dalam memahami dan menguasai konsep-konsep matematika mengenai: limit fungsi, kekontinuan fungsi, turunan fungsi, definisi, sifat-sifat dan teorema terkait beserta aplikasinya serta mampu menerapkannya dalam penyelesaian soal. Materi perkuliahan ini meliputi: Sistem Bilangan Real, Persamaan dan Pertidaksamaan, Nilai Mutlak, Sistem Koordinat Cartesius, Garis Lurus dan Grafik Persamaan, Fungsi dan Limit Fungsi, Operasi pada Fungsi, Limit Fungsi di satu titik, Limit Sepihak, Teorema Limit, Limit Fungsi Trigonometri, Limit Tak Berhingga dan Limit Tak Hingga, Kekontinuan Fungsi; Turunan Fungsi satu peubah, Turunan Sinus dan Kosinus, Aturan Rantai, Turunan Tingkat Tinggi; Aplikasi Turunan, Fungsi Maksimum dan Minimum, Kemonotonan dan Kecekungan, Teorema Nilai Rata-rata. Komposisi materi yang disajikan dalam kurikulum kemudian dituangkan ke dalam bentuk rencana pembelajaran semester (RPS) sebagai acuan dalam implementasi pembelajaran. Pada RPS tersebut, pembelajaran konsep turunan diberikan setelah Ujian Tengah Semester (UTS) dengan jumlah sebanyak 6 pertemuan. Adapun pada Tabel 1 tentang rincian dari RPS yang digunakan.

Tabel 1. Rencana pembelajaran semester

Pertemuan ke-	Kemampuan akhir yang diharapkan	Bahan kajian	Bentuk pembelajaran	Indikator
9	Mahasiswa mampu mengetahui latar belakang konsep turunan, memahami serta menjelaskan konsep turunan serta dapat menentukan turunan fungsi di suatu titik yang diberikan.	Definisi turunan dan turunan fungsi	<i>E-learning</i> , Diskusi dan tanya jawab, presentasi serta penugasan	Kebenaran dan ketepatan mengetahui latar belakang konsep turunan, memahami dan menjelaskan konsep turunan serta dapat menentukan turunan fungsi di suatu titik yang diberikan.
10	Mahasiswa mampu menggunakan aturan turunan untuk menentukan turunan fungsi yang merupakan jumlah/selisih atau hasil kali/hasil bagi dua fungsi sederhana, menentukan turunan fungsi trigonometri, serta menentukan turuna funfsi yang merupakan komposisi dari dua fungsi sederhana.	Aturan-aturan turunan fungsi, turunan fungsi trigonometri, dan aturan rantai	<i>E-learning</i> , Diskusi dan tanya jawab, presentasi serta penugasan	Kebeneran dan ketepatan menggunakan aturan turunan untuk menentukan turunan fungsi yang merupakan jumlah/selisih atau hasil kali/hasil bagi dua fungsi sederhana, menentukan turunan fungsi trigonometri, serta menentukan turunan fungsi yang merupakan komposisi dari dua fungsi sederhana
11	Mahasiswa mampu menggunakan notasi Leibniz dan menentukan turunan tingkat tinggi dari fungsi yang diberikan, serta menentukan turunan fungsi yang diberikan secara implisit.	Turunan tingkat tinggi dan turunan implisit	<i>E-learning</i> , Diskusi dan tanya jawab, presentasi serta penugasan	Kebenaran dan ketepatan menggunakan notasi Leibniz dan menentukan turunan tingkat tinggi dari fungsi yang diberikan, termasuk pola atau rumus umumnya, serta menentukan turunan fungsi yang diberikan secara implisit.
12	Mahasiswa mampu menentukan laju dari suatu besaran yang berkaitan dengan besaran lain yang diketahui lajunya, serta mampu memahami konsep differensial dan menggunakannya	Laju berkaitan, differensial dan hampiran	<i>E-learning</i> , Diskusi dan tanya jawab, presentasi serta penugasan	Kebenaran dan ketepatan menentukan laju dari suatu besaran yang berkaitan dengan besaran lain yang diketahui lajunya, serta mampu memahami konsep differensial dan menggunakannya untuk menentukan nilai hampiran

Pertemuan ke-	Kemampuan akhir yang diharapkan	Bahan kajian	Bentuk pembelajaran	Indikator
	untuk menentukan nilai hampiran dari suatu fungsi di titik yang diberikan			dari suatu fungsi di titik yang diberikan
13	Mahasiswa mampu menentukan nilai maksimum dan minimum dari suatu fungsi yang diberikan, menentukan selang kemonotonan dan titik ekstrim, serta selang kecekungan dan titik belok, dari suatu fungsi yang diberikan	Aplikasi turunan: Nilai maksimum dan minimum, serta kemonotonan dan kecekungan fungsi	<i>E-learning</i> , Diskusi dan tanya jawab, presentasi serta penugasan	Kebenaran dan ketepatan menentukan nilai maksimum dan minimum dari suatu fungsi yang diberikan, menentukan selang kemonotonan dan titik ekstrim, serta selang kecekungan dan titik belok dari suatu fungsi yang diberikan
14	Mahasiswa mampu menentukan nilai maksimum dan minimum local dari suatu fungsi yang diberikan, memecahkan masalah maksimum dan minimum, serta menentukan nilai rata-rata dari suatu fungsi yang diberikan, menggunakan teorema nilai rata-rata untuk memecahkan masalah yang relevan.	Aplikasi turunan: Maksimum dan minimum local, masalah maksimum dan minimum, teorema nilai rata-rata.	<i>E-learning</i> , Diskusi dan tanya jawab, presentasi serta penugasan	Kebenaran dan ketepatan menentukan nilai maksimum dan minimum local dari suatu fungsi yang diberikan, memecahkan masalah maksimum dan minimum, serta menentukan nilai rata-rata dari suatu fungsi yang diberikan, menggunakan teorema nilai rata-rata untuk memecahkan masalah yang relevan

Deskripsi materi turunan pada rencana pembelajaran semester (RPS) yang tersaji pada tabel di atas menunjukkan bahwa bahan kajian, khususnya pada definisi konsep turunan mengarah kepada tujuan agar mahasiswa dapat mengetahui latar belakang konsep turunan, memahami dan menjelaskan konsep turunan serta dapat menentukan turunan fungsi di suatu titik yang diberikan. Latar belakang konsep turunan yang dimaksudkan terkait dengan masalah garis singgung dan kecepatan sesaat. Beberapa cuplikan materi terkait dengan definisi konsep turunan ditampilkan pada Gambar 4.

Berdasarkan cuplikan materi yang tersaji serta observasi yang dilakukan oleh peneliti dalam proses perkuliahan, penjelasan definisi konsep turunan lebih berorientasi kepada penyajian contoh soal berupa permasalahan prosedural sehingga dapat memicu hambatan didaktis yang selanjutnya cenderung mengakibatkan hambatan epistemologi dan hambatan ontogenik bagi siswa maupun mahasiswa dalam mempelajari konsep turunan. Selanjutnya, peneliti melakukan diskusi dengan dosen pengampu pada mata kuliah kalkulus differensial mengenai proses perkuliahan untuk mengkonfirmasi temuan yang diperoleh berdasarkan kurikulum, rencana pembelajaran semester (RPS), dan materi konsep turunan. Adapun diskusi yang dilakukan adalah sebagai berikut:

Definisi

Definisi

Turunan fungsi f di titik x adalah

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Dalam kasus limitnya ada, fungsi f dikatakan **terdiferensialkan** di x .

Contoh

Misalkan $f(x) = 13x - 6$. Tentukan $f'(4)$!

Jawab:

$$\begin{aligned} f'(4) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(4+h) - f(4)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{[13(4+h) - 6] - [13(4) - 6]}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{13h}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} 13 = 13 \end{aligned}$$

Gambar 4. Sajian materi tentang definisi konsep turunan

Peneliti: “bagaimana penyampaian materi turunan yang diberikan kepada mahasiswa?”

Dosen: “Penyampaian materi terstruktur berdasarkan buku referensi, juga disintesis bahan ajar atau modul dari internet, yang penting ada kaitannya dengan konsep turunan, terkait definisi turunan, baik turunan fungsi aljabar maupun fungsi trigonometri yang menggunakan pendekatan konsep limit”.

Peneliti: “menurut ibu, bagaimana kondisi learning obstacles yang ditemukan selama perkuliahan?”

Dosen: “kebanyakan dalam satu kelas itu, saya perhatikan dari hasil tugas-tugas yang masuk atau keseharian dalam perkuliahan, dari 26 orang, hanya satu atau dua orang yang bisa mengikuti. Biasanya diberikan satu soal lalu, siapa yang bisa ke depan untuk menyelesaikan, lalu dibahas bersama-sama agar mengetahui kesalahan atau belum pahami di mana. Hambatan biasanya ditemukan dalam menggunakan konsep turunan dalam definisi limit, tidak bisa mengubah bentuk aljabarnya, terutama perpangkatan. Hambatan lain ada di operasi, kemudian konsep limit juga. Kebanyakan hambatan yang terjadi karena konsep belum memahami konsep limitnya.

Peneliti: “apa saja konsep-konsep esensial yang menurut ibu perlu untuk diperhatikan dalam mempelajari konsep turunan agar hambatan-hambatan tersebut dapat diminimalkan?”

Dosen: “Pertama perlu memahami konsepnya dulu, bagaimana cara menurunkan suatu fungsi dengan menggunakan limit pada definisi turunan untuk menguasai teorema-teorema atau sifat-sifat yang mendukung untuk operasi penurunan, pada bentuk penjumlahan, pembagian, perkalian, karena ada teorema atau sifat khusus yang digunakan. Selain itu diberikan apersepsi tentang konsep-konsep dasar yang berkaitan dengan materi yang diajarkan, serta perbanyak latihan-latihan agar tidak lupa”.

Peneliti: “Menurut ibu, apa saja indikator mahasiswa dikatakan memahami konsep turunan yang diajarkan?”

Dosen: “Indikator dikatakan paham, dikasih soal, apakah penyelesaiannya sudah sesuai prosedur, sampai ke hasil akhirnya seperti apa. Biasanya dipanggil ke depan, dari hasil pekerjaan, dapat dilihat mana yang belum paham. Bisa menurunkan fungsi dan menyelesaikan masalah kontekstual”

Mengacu kepada hasil diskusi dengan dosen pengampu mata kuliah kalkulus differensial, diperoleh gambaran bahwa proses perkuliahan lebih berorientasi pada penyelesaian masalah sesuai dengan prosedur penurunan suatu fungsi yang menekankan kepada penguasaan operasi dan sifat-sifat konsep turunan. Adapun makna dari definisi konsep turunan disampaikan secara ringkas dengan menggunakan representasi geometris terkait garis singgung pada kurva. Dari hasil wawancara yang dilakukan terhadap mahasiswa yang telah memperoleh perkuliahan, sebagian besar partisipan mengalami hambatan epistemologis ketika diminta untuk menjelaskan representasi geometris tersebut. Hambatan tersebut muncul ketika siswa tidak memahami makna definisi konsep turunan dengan menggunakan konsep limit yang kemudian dikaitkan dengan persamaan garis singgung pada kurva. Berdasarkan hasil penelitian sebelumnya, hambatan epistemologis dipandang sebagai akibat dari hambatan didaktis karena penyajian konsep turunan yang tidak relevan dengan matematika ilmiah.

Konsep turunan dalam matematika ilmiah menjadi dasar bagi para noosfer (perancang kurikulum dan penulis buku teks matematika) serta bagi guru dalam menyusun pengetahuan yang akan diajarkan (*knowledge to be taught*) dan pengetahuan yang diajarkan (*taught knowledge*), sehingga pada

akhirnya menjadi ilmu. yang akan dipelajari siswa (*learnt knowledge*). Untuk sampai pada pengetahuan yang dipelajari, transfer pengetahuan melalui proses transposisi didaktik dilakukan secara bertahap. Transisi pertama adalah peralihan pengetahuan dari pengetahuan ilmiah ke pengetahuan untuk diajarkan yang terjadi melalui proses transposisi didaktik eksternal (Paun, 2006). Hasil dari proses transposisi didaktis eksternal berupa pengetahuan yang akan diajarkan yang disajikan dalam buku teks matematika sekolah. Transisi kedua adalah transfer pengetahuan dari pengetahuan yang diajarkan ke pengetahuan yang diajarkan yang terjadi melalui proses transposisi didaktik internal (Paun, 2006). Hasil dari proses transposisi didaktis internal adalah ilmu-ilmu yang sebenarnya diajarkan di kelas (*taught knowledge*) yang disajikan oleh guru dalam perkuliahan. Aspek kedua yang dianalisis dalam analisis transposisi didaktik ini adalah pengetahuan yang dipilih dan dirancang untuk digunakan di lingkungan sekolah (pengetahuan yang akan diajarkan).

Analisis ini penting untuk dilakukan, karena tidak mungkin menafsirkan matematika sekolah tanpa mempertimbangkan fenomena yang berkaitan dengan rekonstruksi pengetahuan matematika sekolah dari pengetahuan ilmiah matematika (Bosch & Gascon, 2006). Kurikulum dan buku teks matematika dipilih sebagai dokumen utama untuk melakukan analisis tersebut, karena pencatatan pengetahuan dalam buku teks seringkali dipandang sebagai cara yang paling efektif untuk mentransmisikan pengetahuan, sehingga menganalisis buku teks matematika adalah cara yang cukup efektif untuk mengetahui suatu bentuk pengetahuan yang diajarkan (Kang & Kilpatrick, 1992). Temuan penelitian menunjukkan bahwa telah terjadi pergeseran ilmu pada materi turunan dari konteks *scholarly knowledge* ke konteks *knowledge to be taught*.

Transfer pengetahuan ini terjadi baik secara kontekstual maupun konseptual yang menimbulkan kesenjangan konseptual antara konsep dasar turunan sebagai ilmu yang akan diajarkan dengan konsep dasar turunan sebagai ilmu pengetahuan. Secara konseptual, kesenjangan konseptual ditemukan pada beberapa representasi, yaitu pada representasi simbolik, representasi verbal, representasi geometris, dan representasi paradigmatik fisik. Sedangkan dalam konteksnya, konsep turunan telah dialihkan dari pengetahuan apriori menjadi a posteriori (Suryadi, 2019a). Sehingga penyajian materi menjadi lebih kontekstual. Ketika ilmu pengetahuan dipindahkan dari konteks *scholarly knowledge* ke *knowledge to be taught*, tentu ada aspek pedagogik yang perlu diperhatikan selain aspek ilmu itu sendiri. Sebab, gagasan dibalik didaktik yaitu Upaya untuk mencoba melakukan sesuatu hal agar orang lain juga mempelajari hal tersebut (Chevallard, 2006). Oleh karena itu, dalam proses transfer ilmu pengetahuan, perancang kurikulum, penulis buku teks, dan guru tidak hanya memikirkan substansi matematika, tetapi juga hubungan antar konsep, keterkaitan alur berpikir yang disesuaikan dengan perkembangan kognitif siswa (Suryadi, 2019a).

KESIMPULAN

Tinjauan yang dilakukan oleh peneliti terhadap proses transposisi eksternal pada pembelajaran konsep turunan menunjukkan bahwa pengetahuan ilmiah dari ide-ide yang diturunkan dalam lingkup komunitas ilmiah direkonstruksi ke pengetahuan untuk diajarkan pada lingkup institusional. Selanjutnya, hasil dari rekonstruksi tersebut ditransfer oleh pendidik ke peserta didik sebagai pengetahuan yang diajarkan dan dipelajari di lingkup kelas. Namun, berdasarkan hasil tinjauan pada konteks *knowledge to be taught* atau pengetahuan untuk diajarkan mengungkapkan ketidakakuratan dalam penyajian ide dan gagasan, terutama pada definisi konsep turunan. Ketidaksesuaian antara definisi konsep formal dan gambaran konsep peserta didik di dalam pembelajaran dengan mengacu kepada buku teks matematika yang dijadikan sebagai referensi utama mengakibatkan hambatan epistemologis, ontogenik, dan didaktik bagi partisipan. Keterbatasan di dalam penelitian mencakup analisis terhadap buku teks matematika yang belum dilakukan secara spesifik dengan menggunakan teori yang relevan sehingga perbaikan dalam konteks *knowledge to be taught* masih perlu diteliti pada penelitian berikutnya. Peneliti yang lain dapat menggunakan teori prakseologi dalam melakukan tinjauan buku teks matematika di dalam penelitiannya.

DAFTAR PUSTAKA

- Aiyub, A. (2023). Ways of thinking siswa dalam menyelesaikan masalah pola bilangan non rutin: Suatu penelitian fenomenologi hermeneutik. *Journal of Didactic Mathematics*, 4(2), 65-76. <https://doi.org/10.34007/jdm.v4i2.1851>
- Akgün, L., İşleyen, T., Tatar, E., Soylu, Y., & Duru, A. (2010). Comprehension test in calculus course. *Procedia-Social and Behavioral Sciences*, 2(2), 1527-1531. <https://doi.org/10.1016/j.sbspro.2010.03.229>
- Aspinwell, L., & Miller, D. (1997). Students' positive reliance on writing as a process to learn first semester calculus. *Journal of Instructional Psychology*, 24, 253–261.
- Bartle, R. G., & Sherbert, D. R. (2000). *Introduction to real analysis (Vol. 2)*. New York: Wiley.
- Bergsten, C., Jabionka, E., & Klisinska. (2010). A remark on didactic transposition theory. In *Mathematics and Mathematics Education: Cultural and Social Dimensions: Proceedings of MADIF7 (The Seventh Mathematics Education Research Seminar)*. Stockholm
- Berry, J. S., & Nyman, M. A. (2003). Promoting students' graphical understanding of the calculus. *The Journal of Mathematical Behavior*, 22(4), 479-495. <https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2003.09.006>
- Bezuidenhout, J. (1996). First-year university students' understanding of rate of change. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 29(3), 389–399. <https://doi.org/10.1080/0020739980290309>
- Bosch, M. & Gascon, J. (2006). Twenty-five years of didactic transposition. *ICMI Bulletin*. No 58.
- Brousseau, G. (2002). *Theory of didactical situation in mathematics*. New York: Kluwer Academic Publisher.
- Chevallard, Y., & Bosch, M. (2014). Didactic transposition in mathematics education. In: Lerman S. (Eds.), *Encyclopedia of mathematics education* (pp.170-174). London: Springer, Dordrecht.
- Chevallard, Y. (1988). *On didactic transposition theory: Some introductory notes*. Paper was Presented in International Symposium on Selected Domains of Research and Development in Mathematics Education, Bratislava, Czechoslovakia.
- Chevallard, Y. (2006). Steps towards a new epistemology in mathematics education. In M. Bosch (Eds.), *Proceedings of IV Congress of European Society for Research in Mathematics Education (CERME 4)* (pp. 21-30). Barcelona: FUNDEMI-IQS.
- Cornu, B. (1991). Limits. In *Advanced mathematical thinking* (pp. 153-166). Dordrecht: Springer Netherlands. https://doi.org/10.1007/0-306-47203-1_10
- Creswell, J. W. (2012). *Educational research. planning, conducting and evaluating quantitative and qualitative research. Fourth Edition*. Boston: Pearson Education, Inc.
- Duru, A. (2011). Pre-service teachers' perception about the concept of limit. *Educational Sciences: Theory and Practice*, 11(3), 1710-1715.
- Eatough, V., & Smith, J. A. (2017) Interpretative phenomenological analysis. In: Willig, C. and Stainton-Rogers, W. (eds.) *Handbook of Qualitative Psychology 2nd Edition* (pp. 193-211). London, UK: Sage.
- Ernest, P. (1994). The philosophy of mathematics and the didactics of mathematics. In: R. Biehler, R. W. Scholz, R. Strässer, & B. Winkelmann (Eds.), *Didactics of mathematics as a scientific discipline* (pp. 335-350). Dordrecht: Kluwer Academic Publisher.
- Fuentealba, C., Badillo, E., Sánchez-Matamoros, G., & Cárcamo, A. (2019). The understanding of the derivative concept in higher education. *Eurasia Journal of Mathematics, Science and Technology Education*, 15(2), em1662. <https://doi.org/10.29333/ejmste/100640>
- Harel, G. (2008). What is mathematics? A pedagogical answer to a philosophical question. In B. Gold & R.A. Simons (Eds.), *Current issues in the philosophy of mathematics from the perspective of mathematicians*. Washington, DC: Mathematical American Association.
- Hughes-Hallett, D., Gleason, A. M., & McCallum, W. G. (2020). *Calculus: Single and multivariable*. John Wiley & Sons.

- Juter, K. (2011). University students linking limits, derivatives, integrals and continuity. In *CERME 7* (pp. 2043-2052).
- Kang, W. A. N., & Kilpatrick, J. (1992). Didactic transposition in mathematics textbooks. *For the Learning of Mathematics*, 12(1), 2–7.
- Karadeniz, I., & Thompson, D. R. (2018). Precalculus teachers' perspectives on using graphing calculators: an example from one curriculum. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 49(1), 1-14. <https://doi.org/10.1080/0020739X.2017.1334968>
- Klisinska, A. (2009). *The fundamental theorem of calculus: a case study into the didactic transposition of proof* (Doctoral dissertation, Luleå tekniska universitet).
- Moru, E. K. (2020). An APOS analysis of university students' understanding of derivatives: A Lesotho case study. *African Journal of Research in Mathematics, Science and Technology Education*, 24(2), 279–292. <https://doi.org/10.1080/18117295.2020.1821500>
- Paun, E. (2006). Transposition didactique: Un processus de construction du savoir scolaire. *Carrefours de l'éducation*, 22, 3-13. <https://doi.org/10.3917/cdle.022.0003>
- Permendikbud Nomor 24 Tahun 2016 tentang Kompetensi Inti dan Kompetensi Dasar.
- Polya, G. (2004). *How to solve it: A new aspect of mathematical method*. Princeton university press.
- Prihandhika, A., Fatimah, S., & Dasari, D. (2018). The improvement of mathematical connection ability and habits of students' mind with missouri mathematics project and discovery learning. *Proceedings of the Mathematics, Informatics, Science, and Education International Conference (MISEIC 2018)*, 157, 253-257. <https://doi.org/10.2991/miseic-18.2018.61>
- Ricoeur, P., & Pellauer, D. (1985). Evil, a challenge to philosophy and theology. *Journal of the American Academy of Religion*, 53(4), 635-648.
- Sbaragli, S., Arrigo, G., D'Amore, B., Fandiño Pinilla, M. I., Frapolli, A., Frigerio, D., & Villa, O. (2011). Epistemological and didactic obstacles: The influence of teachers' beliefs on the conceptual education of students. *Mediterranean journal for research in mathematics education*, 10, 61-102.
- Skemp, R. R. (2012). *The psychology of learning mathematics: Expanded American edition*. Routledge.
- Sulastri, R. (2023). Studi didactic transposition: Eksplorasi knowledge to be taught pada limit fungsi. *Journal of Didactic Mathematics*, 4(2), 106-117. <https://doi.org/10.34007/jdm.v4i2.1903>
- Suryadi, D. (2019a). *Landasan filosofi penelitian desain didaktis (DDR)*. Bandung: Gapura Press.
- Suryadi, D. (2019b). Pengetahuan transposisi sebagai konektor pendidikan akademik dan pendidikan profesi guru (PPG) matematika. Disampaikan di lingkungan Departemen Pendidikan Matematika UPI Bandung. Tidak diterbitkan.
- Varberg, D. E., Purcell, E. J., & Rigdon, S. E. (2000). *Calculus*. Prentice Hall.
- Vinner, S. (1983). Concept definition, concept image and the notion of function. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 14(3), 293-305.
- Vinner, S. (1991). The role of definitions in the teaching and learning of mathematics. In D. Tall (Ed.), *Advanced Mathematical Thinking* (Vol. 11, hlm. 65–81). Dordrecht: Springer Netherlands. https://doi.org/10.1007/0-306-47203-1_5